ليكن $n$ عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$ . نعتبر الدالة العددية $f_n$ المعرفة بما يلي

$f_n(x)=(1-x)^n e^{2x}$ و ليكن $(C_n)$ منحنى الدالة $f_n$ في معلم متعامد

$(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

$(I)$ 1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=0$ و أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(C_n)$ عند $+\infty$

3) أحسب $f_n'(x)$ و أنجز جدول تغيرات كل من الدالتين $f_1$ و $f_2$

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_1)$ ; $(C_2)$ و أرسمهما

$(II)$ نعتبر الدالة $F$ المعرفة على $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x)=\int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}dt$

1) أ- بين أن الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

و أن $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة $F$

2) أ- بين أن $\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)\,dt \le F(x)\le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)\,dt$ $(\forall x<0)$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_x^0 f_1(t)\,dt=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}$

ج- نقبل أن $F(x)$ تقبل نهاية $l$ عند $-\infty$ بين أن $\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}$

$(III)$ نضع $U_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ لكل عددا طبيعيا $n$ من $\mathbb{N}^*$

1) أ- بين أن $U_n>0$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- أدرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[0,1]$

ج- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

2) أ- بين أن $U_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}U_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- استنتج ب $cm^2$ مساحة الحيز $(\Delta)$ المحصور بين المنحنيين

$(C_1)$ ; $(C_2)$ و المستقيمين $x=0$ ; $x=1$

3) بين أن $\frac{1}{n+1}\le U_n\le\frac{1}{n-1}$ $(\forall n\ge 2)$ و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$

4) ليكن $a$ عددا حقيقيا موجبا و بحيث $a\neq U_1$ .

نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$V_1=a$ و $V_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}V_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم نضع $d_n=|V_n-U_n|$

أ- بين أن $d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} d_n=+\infty$

ب- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ متباعدة

$(IV)$ نضع $W_n=\frac{2^n}{n!}U_n$ لكل عدد طبيعي $n$ من $\mathbb{N}^*$

1) أ- بين أن $\frac{2^{n-1}}{n!}\le 1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- بين أن $W_n\le\frac{2e^2}{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n=0$

2) أ- بين أن $W_{n+1}=-\frac{2^n}{(n+1)!}+W_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- أحسب مشتقة الدالة $x\to\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$ و بين أن $W_1=\frac{1}{2}\left(e^2-3\right)$

ج- بين أن $W_n=\frac{1}{2}\left(e^2-\sum\limits_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

د- استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$